УДК 372.851

МЕТОД КРАМЕРА КАК СРЕДСТВО ПРОДУКТИВНОГО ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Гербеков Х.А., кандидат педагогических наук, доцент,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии,
Карачаево-черкесский государственный университет имени У. Д. Алиева, г. Карачаевск
hamit_gerbekov@mail.ru

Боташева З.Х., старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии,
Карачаево-черкесский государственный университет имени У. Д. Алиева, г. Карачаевск

Аннотация. В данной статье рассматривается методика продуктивного изучения теории определителей студентами нематематических специальностей с помощью метода Крамера. Формулы Крамера для системы двух линейных уравнений и трех линейных уравнений получаются непосредственно методом подстановки. Определитель предлагается вычислять разложением по первой строке. Для доказательства свойств определителей широко используется метод математической индукции.

Ключевые слова: система линейных уравнений, метод Крамера, формулы Крамера, теория определителей, разложение определителя по первой строке, метод математической индукции.

METHOD KRAMER AS A MEANS OF PRODUCTIVE STUDY THEORY OF DETERMINANTS

H.A. Gerbekov, PhD, associate professor, head of the department of algebra and geometry,
Karachayevo-cherkessia state university named after W. D. Aliyev, Karachaevsk
hamit_gerbekov@mail.ru

Z.N. Botasheva, senior lecturer of the department of algebra and geometry,
Karachay-cherkessia state university named after W.D. Aliyev, Karachaevsk

Abstract. This article discusses the technique of productive study of the theory of determinants of student non-mathematical specialties using the method of cramer solution of linear equations. Cramer's formula for a system of two linear equations and three linear equations are obtained directly by the method of substitution. Determinant serves to calculate the expansion in the first row. To prove the properties of determinants widely used method of induction.

Keywords: system of linear equations, the method of Cramer, Cramer's formula, the theory of determinants, expansion of the determinant of the first row, the method of mathematical induction.

При обучении математике практико - ориентированность играет существенную роль не только в школе, но и в вузе. Например, при изучении темы матриц и определителей студенты нематематических специальностей часто задают вопрос, для чего им это нужно. При ответе на этот вопрос мы акцентируем их внимание на том, что матрицы и определители – это инструмент, аппарат для решения конкретных задач. В частности, наиболее используемая модель для решения многих практических задач различных областей, будь то экономика, психология, статистика и т. д. – это система линейных уравнений относительно конечного числа переменных с действительными коэффициентами.

Рассматривая тему решения систем линейных уравнений со студентами гуманитарных специальностей в курсе дисциплины «Математика», начнем с метода Крамера решения невырожденной системы линейных уравнений. Этот метод позволяет параллельно ввести понятие матрицы и определителя матрицы. Получается, на наш взгляд, достаточно понятная и экономящая время методика, приводящая к продуктивному усвоению теории матриц и определителей.

Вначале рассмотрим линейное уравнение относительно нескольких переменных и его решения. Для этого начнем объяснение со знакомого из школьной математики линейного уравнения относительно одной неизвестной и его решения:

$$ax = b \; . \tag{1}$$

Решением уравнения (1) называется такое число α, что подставляя это число вместо переменной x в уравнение (1), получим числовое тождество. Решить уравнение (1) значит найти множество всех его решений.

Со школы известно, что при решении уравнения (1) возможны три случая:

1. Если $a \neq 0$, уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.
2. Если $a = 0$, но $b = 0$, уравнение имеет бесконечное множество решений (так как уравнение имеет вид $0 * x = 0$, то любое число будет решением).
3. Если $a = 0$, но $b \neq 0$, уравнение не имеет решений (в этом случае уравнение принимает вид $0 * x = b, где\ b \neq 0$, и ни одно число этому свойству не удовлетворяет).

Уравнение первой степени вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \tag{2}$$

является линейным уравнением относительно двух переменных x_1, x_2. Числа a_{11}, a_{12} называются коэффициентами уравнения, а число b_1 называется свободным членом. Числа, стоящие в нижнем правом углу, назовем индексами.

Решением уравнения (2) называется пара чисел (α_1, α_2) такая, что при подстановке вместо переменной x_1 числа α_1, а вместо переменной x_2 числа α_2превращает уравнение (2) в числовое тождество. Решить уравнение (2) – значит найти множество всех таких пар чисел (α_1, α_2) .

Аналогично, уравнение первой степени вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \tag{3}$$

- это линейное уравнение относительно n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ (все переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ в уравнении встречаются в первой степени). Числа $a_{11}, \dots, a_{1n}$ называются коэффициентами уравнения, а число b_1 - свободным членом уравнения.

Решением уравнения (3) называется упорядоченная строка *n* чисел (*n*-ка) $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ такая, что при подстановке вместо переменной x_1 числа α_1, а вместо переменной x_2 числа α_2 , …, вместо переменной x_n числа α_n превращает уравнение (3) в числовое тождество. Решить уравнение (3) – значит найти множество всех таких упорядоченных строк чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Переход от школьной к высшей математике, по нашему мнению, предполагает обязательное рассмотрение вопроса равносильных преобразований уравнения. Два уравнения называются равносильными, если имеют одинаковое множество решений. Переход от одного уравнения к равносильному ему уравнению назовем равносильным преобразованием. Необходимо обратить особое внимание студентов на тот факт, что если к обеим частям уравнения (1), (2) или (3) прибавить одно и то же число или умножить обе части уравнения на одно и то же ненулевое число, то получится равносильное уравнение. Можно задать доказательство этого утверждения в качестве аудиторной самостоятельной работы студентов.

Обратим внимание студентов на то, что равносильные преобразования позволяют привести уравнение к более простому виду, такому, которое мы можем решить, - как правило, это линейное уравнение относительно одной неизвестной.

Рассмотрим теперь систему n линейных уравнений относительно n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4)$$

Квадратная таблица чисел, состоящая из коэффициентов при неизвестных системы (4) называется матрицей системы. Матрица является квадратной – в ней число строк (горизонтальные строки) совпадает с числом столбцов (вертикальные строки). Существуют и неквадратные матрицы, в которых число строк не совпадает с числом столбцов. Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита:

A, B, C, D… Числа a_{11}, $a_{12}, \dots, a_{nn}$, составляющие матрицу, - ее элементы. Числа b_iсвободными членами.

Решением системы (4) называется упорядоченная строка *n* чисел (*n*-ка) $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ такая, что при подстановке вместо переменной x_1 числа α_1, а вместо переменной x_2 числа α_2 и т. д. , вместо переменной x_n числа α_n в систему каждое уравнение системы превращается в числовое тождество. Решить систему (4) – значит найти множество всех таких упорядоченных строк чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Изучим вопрос равносильных преобразований системы (4). Очевидно, что при перемене местами двух уравнений системы множество решений системы остается неизменным. Такое преобразование системы назовем элементарным преобразованием второго рода. Также решение системы останется неизменным, если какое-нибудь уравнение системы (4) умножить на ненулевое число. Такое преобразование системы назовем элементарным преобразованием третьего рода. Легко увидеть, что если два уравнения системы сложить и результат записать вместо одного из уравнений системы, то получится равносильная система. Действительно, не ограничивая общности, сложим первое и второе уравнения системы и запишем вместо второго уравнения системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + \cdots + (a_{1n} + a_{2n})x_n = b_1 + b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (5)$$

Пусть строка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ является решением системы. Тогда

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha \equiv b_1$$
$$a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \equiv$$

Сложим левые и правые части тождеств, Получим тождество:

$(a_{11} + a_{21}) * \alpha_1 + (a_{12} + a_{22})\alpha_2 + \cdots + (a_{1n} + a_{2n})\alpha_n \equiv b_1 + b_2.$

Оно доказывает, что строка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ является решением системы (5).

Легко заметить, что последовательное проведение описанных преобразований приводит к равносильной системе. В частности, композиция элементарного преобразования третьего рода и последнего преобразования, называемая элементарным преобразованием первого рода, сохраняет равносильность системы.

Решение системы линейных уравнений начнем с решения системы двух линейных уравнений относительно двух неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (6)$$

Используем «школьный» метод подстановки. Из первого уравнения выразим x_2 через x_1 и подставим во второе уравнение:

$x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1,\ a_{21}x_1 + a_{12}\left(\frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1\right) = b_2,$

$a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}b_1 - a_{22}a_{11}x_1 = b_2a_{12},$

$$x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_1a_{22} - a_{12}b_2. \quad (6.1)$$

Аналогично, найдем x_2:

$$x_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_2a_{11} - a_{21}b_1. \quad (6.2)$$

Коэффициенты линейных уравнений (6.1) и (6.2) назовем определителями (детерминантами) (матрицы) второго порядка и обозначим:

$det\ A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$

Тогда линейные уравнения (6.1) и (6.2) относительно одной переменной примут в новых обозначениях вид: $x_1\Delta = \Delta_1$, $x_2\Delta = \Delta_2$.

Откуда при $\Delta \neq 0$ получим $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Это формулы Крамера решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Определитель Δ будем называть главным определителем, а Δ_1 и Δ_2 - побочными (вспомогательными) определителями системы (6).

Аналогично, последовательно выражая переменные и подставляя их в другие уравнения системы, решим систему трех линейных уравнений относительно трех неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{6.3}$$

Получим систему (6.4)

$$x_1\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}\right) = b_1\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_2a_{23} \\ b_3a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_2a_{22} \\ b_3a_{32} \end{vmatrix}$$

$$x_2\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}\right) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} b_2a_{23} \\ b_3a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}b_2 \\ a_{31}b_3 \end{vmatrix} \tag{6.4}$$

$$x_3\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}\right) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}b_2 \\ a_{32}b_3 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}b_2 \\ a_{31}b_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

Назовем коэффициенты определителями третьего порядка и обозначим их следующим образом

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = b_1\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_2a_{23} \\ b_3a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_2a_{22} \\ b_3a_{32} \end{vmatrix} \tag{6.5}$$

$$\Delta_2 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} b_2a_{23} \\ b_3a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}b_2 \\ a_{31}b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}b_2 \\ a_{32}b_3 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}b_2 \\ a_{31}b_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

Тогда мы получим формулы Крамера для системы трех линейных уравнений при условии $\Delta \neq 0$:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{6.6}$$

Правило $det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ назовем разложением определителя матрицы по первой строке. Возьмем первый элемент первой строки - a_{11}. Он находится на пересечении первой строки и первого столбца. Зачеркнем в уме первую строку и первый столбец (по месту, на котором находится этот элемент). Тогда от матрицы останется число a_{22}. Назовем это число дополнительным минором элемента a_{11}. Сумма индексов элемента a_{11} равна 1+1=2- четному числу. Дополнительный минор, умноженный на $(-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$, называется алгебраическим дополнением элемента a_{11} и обозначается A_{11}.Аналогично, зачеркивая в уме место, на котором находится элемент a_{12}, получим число a_{21} , - дополнительный минор элемента a_{12}. Умножая его на $(-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$, получим число A_{12} =-a_{21} ,являющееся алгебраическим дополнением элемента a_{12}. Тогда определитель второго порядка есть сумма произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения:

$$det\, \text{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}. \tag{7}$$

Легко заметить, что если одна строка нулевая, т. е. все элементы строки равны нулю, то определитель второго порядка равен нулю. Допустим, что две строки одинаковые. Тогда $det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0$, т. е. определитель нулевой.

Поменяем две строки местами, т. е. произведем над матрицей элементарное преобразование второго рода:

$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -det\, A$ - определитель поменял знак.

Умножим строку на число, т. е. произведем над матрицей элементарное преобразование третьего рода:

$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda det\, A.$

Рассмотрим матрицу третьего порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Если в уме зачеркнуть первую строку и первый столбец матрицы, то останется подматрица второго порядка: $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы назовем дополнительным минором элемента a_{11}.Алгебраическое дополнение $A_{11} = (-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Соответственно, алгебраическое дополнение элемента a_{12} равно $A_{12} = (-1)^{1+2} det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$A_{13} = (-1)^{1+3} det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$. Тогда определителем третьего порядка назовем число

$$det\ \mathrm{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{8}$$

Последнее определение полностью соответствует равенствам (6.5), полученным методом Крамера.

Аналогично, определитель *n*-го порядка примем равным:

$$det\ \mathrm{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \tag{9}$$

Методом математической индукции легко доказать по этой формуле все основные свойства определителей. Заметим, что большинство доказательств этих утверждений можно задать студентам в качестве домашней самостоятельной работы.

Теперь выведем формулу Крамера для системы n линейных уравнений с n неизвестными. Обе части первого уравнения системы (4) умножим на алгебраическое дополнение A_{11}, обе части второго уравнения системы (4) умножим на алгебраическое дополнение A_{21} , обе части третьего уравнения умножим на алгебраическое дополнение A_{31} и т. д. обе части последнего уравнения умножим на алгебраическое дополнение A_{n1}. Получим равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}A_{11}\,x_1 + a_{12}A_{11}\,x_2 + \cdots + a_{1n}A_{11}\,x_n = b_1\,A_{11} \\ a_{21}A_{21}\,x_1 + a_{22}A_{21}\,x_2 + \cdots + A_{2n}A_{21}x_n = b_2\,A_{21} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}A_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,A_{n1}x_2 + \cdots + a_{nn}A_{n1}\,x_n = b_n\,A_{n1} \end{cases}$$

Сложим все уравнения и вынесем общие множители:

$(a_{11}A_{11} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 + (\,a_{12}A_{11} + \cdots + a_{n2}\,A_{n1}\,)x_2 + \cdots + (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1}) = b_1A_{11} + b_2\,A_{21} + \cdots b_2A_{n1}$. В левой части уравнения только одно слагаемое отлично от нуля – первое, а в правой части стоит определитель Δ_1 :$\Delta x_1 = \Delta_1$. Рассуждая аналогично, $\Delta x_2 = \Delta_2$, …, $\Delta x_n = \Delta_n$

При условии $\Delta \neq 0$ для главного определителя получим формулы Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, …, $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

Заметим, что при использовании приведенной выше методики можно подготовить хороший задел для объяснения метода Гаусса решения систем линейных уравнений. Приведенная методика, как показывает наш опыт приводит к продуктивному обучению теории определителей, а также матриц. Данную методику можно также использовать при углубленном изучении математики в школе.

Литература

1. Всеросийские математические олимпиады школьников: Кн. Для учащихся/Г.Н. Яковлев, Л. П. Купцов,С. В. Резниченко, П. Б. Гусятников. – М.: Просвещение, 1992.
2. Кострикин А. И.Введение в алгебру. / А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.Основы алгебры: Учеб. для вузов.- 2-е изд., исправл. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004.